

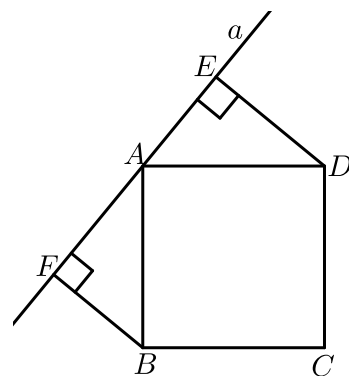
第2讲 正方形中的三垂直与半角模型（练习）

一、三垂直模型

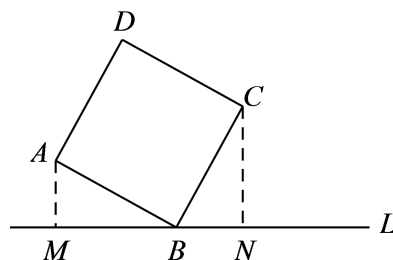
勾股弦图

基本模型及迁移

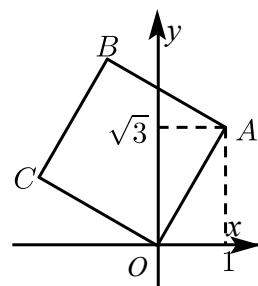
1. 如图所示，直线 a 经过正方形 $ABCD$ 的顶点 A ，分别过顶点 B 、 D 作 $BF \perp a$ 于点 F ， $DE \perp a$ 于点 E ，若 $DE = 4$ ， $BF = 3$ ，则 EF 的长为 _____ .



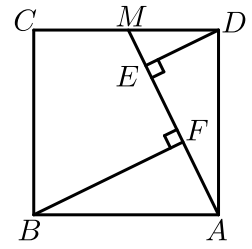
2. 如图，直线 L 过正方形 $ABCD$ 的顶点 B ，点 A 、 C 到直线 L 的距离分别是1和2，则正方形的边长是 _____ .



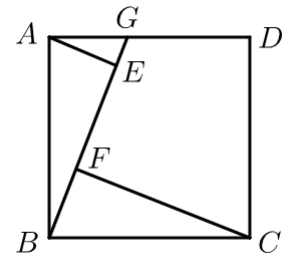
3. 如图，将正方形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， O 是原点， A 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，则点 C 的坐标为 _____ .



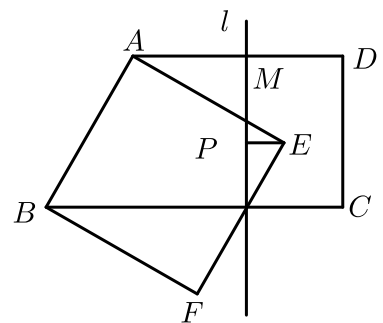
4. 如图，点 M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 上一点，连接 AM ，作 $DE \perp AM$ 于点 E ，作 $BF \perp AM$ 于点 F ．
求证： $BF = AE$ ．



5. 如图， G 为正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一个动点， $AE \perp BG$ ， $CF \perp BG$ ，垂足分别为点 E ， F ．已知 $AD = 4$ ，则 $AE^2 + CF^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



6. 如图所示，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， l 是 AD 的垂直平分线，交 AD 于点 M ，以腰 AB 为边作正方形 $ABFE$ ，作 $EP \perp l$ 于点 P ．
求证： $2EP + AD = 2CD$ ．



十字模型

7. 如图，已知正方形 $ABCD$.

- (1) 如图1， E 是 AD 上一点，过 BE 上一点 O 作 BE 的垂线交 AB 于点 G ，交 CD 于点 H ，求证：
 $BE = GH$.

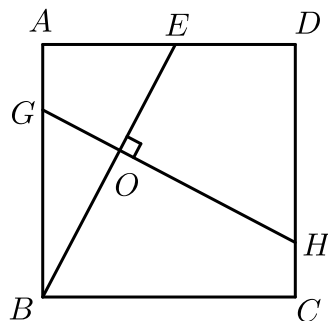


图1

- (2) 如图2，过正方形 $ABCD$ 内任意一点作两条互相垂直的直线，分别交 AD ， BC 于点 E ， F ，交 AB ， CD 于点 G ， H ， EF 与 GH 相等吗？请写出你的结论 .

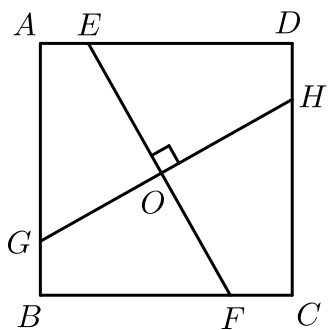


图2

- (3) 当点 O 在正方形 $ABCD$ 的边上或外部时，过点 O 作两条互相垂直的直线，被正方形相对的两边（或它们的延长线）截得的两条线段还相等吗？其中一种情形如图3所示，过正方形 $ABCD$ 外一点 O 作互相垂直的两条直线 m ， n ， m 与 AD ， BC 的延长线分别交于点 E ， F ， n 与 AB ， DC 的延长线分别交于点 G ， H ，试就该图形对你的结论加以证明 .

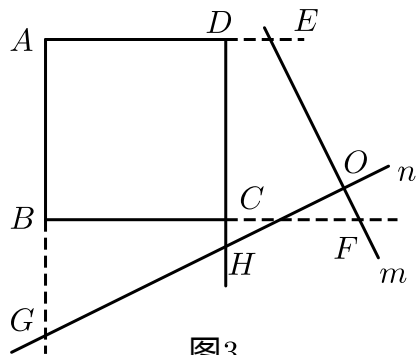


图3

8. 根据图解答下列各题：

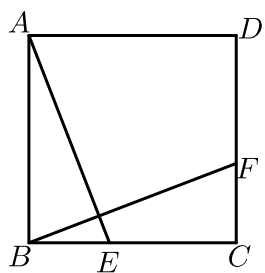


图 1

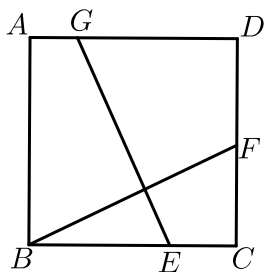


图 2

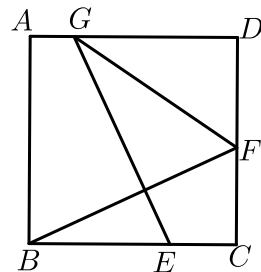


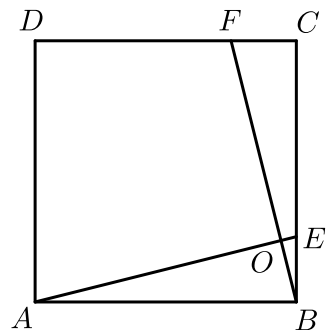
图 3

- (1) 如图1, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 BC 、 CD 边上的点, 满足 $AE \perp BF$. 求证：
 $AE = BF$.
- (2) 如图2, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 分别是 BC 、 CD 、 AD 边上的点, 满足 $EG = BF$, 若
 $\angle FBC = 35^\circ$, 则 $\angle DGE =$ _____ .
- (3) 如图3, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 分别是 BC 、 CD 、 AD 边上的点, 满足 $EG = BF$, 连
 接 GF . 求证： $GF + BE > \sqrt{2}BF$.

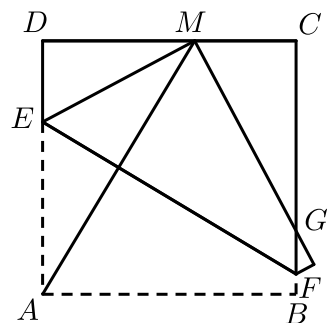
9. 在正方形 $ABCD$ 中 .

(1) 如图 , 若点 E, F 分别在边 BC, CD 上 , AE, BF 交于点 O , 且 $\angle AOF = 90^\circ$ 求证 :

$$AE = BF .$$

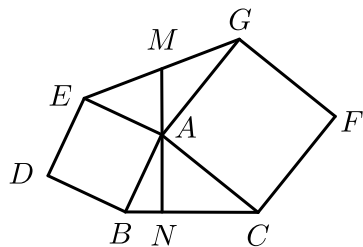


(2) 如图 , 将正方形 $ABCD$ 折叠 , 使顶点 A 与 CD 边上的点 M 重合 , 折痕交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 边 AB 折叠后与 BC 边交于点 G . 若 $DC = 5, CM = 2$, 求 EF 的长 .



🔗 双正方形模型 (三垂综合应用)

10. 已知如图 , 分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 为边作正方形 $ABDE, ACFG$, 过 A 作 $MN \perp BC$, 交 BC 于 N , 交 EG 于 M , 求证 : $EM = MG$.

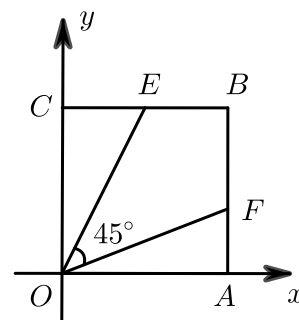


二、角含半角模型

|| 正方形角含半角的和差关系

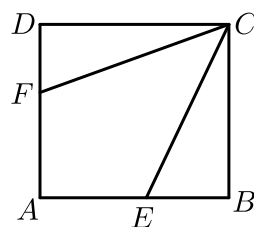
🕒 半角在倍角内

11. 如图，在正方形 $OABC$ 中，点 B 的坐标是 $(4, 4)$ ，点 E, F 分别在边 BC, BA 上， $OE = 2\sqrt{5}$ ，若 $\angle EOF = 45^\circ$ ，则 F 点的纵坐标是 () 。

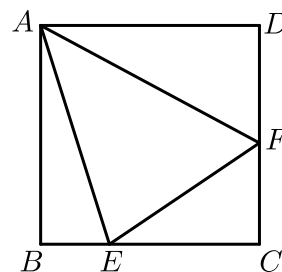


- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5} - 1$

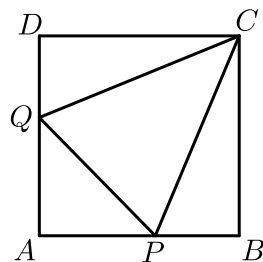
12. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E, F 分别在 AB, AD 上，若 $CE = 3\sqrt{5}$ ，且 $\angle ECF = 45^\circ$ ，则 CF 的长为 _____。



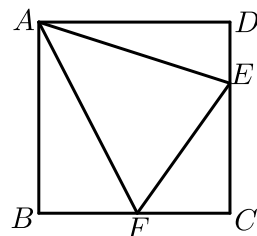
13. 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 2， $\angle EAF = 45^\circ$ ，则 $\triangle CEF$ 的周长为 _____。



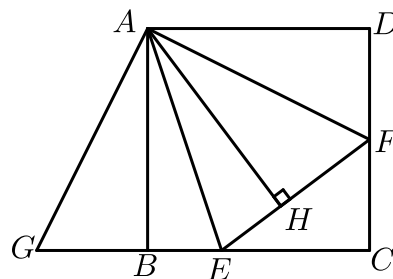
14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1， P ， Q 分别为 AB ， DA 上的点，当 $\triangle APQ$ 的周长为2时，则 $\angle PCQ = \underline{\hspace{2cm}}$.



15. 如图， E 、 F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，且 $DE = 10\text{cm}$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle EFC$ 的周长为 80cm ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.

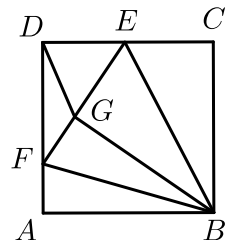


16. 如图，在正方形 $ABCD$ 内作 $\angle EAF = 45^\circ$ ， AE 交 BC 于点 E ， AF 交 CD 于点 F ，连接 EF ，过点 A 作 $AH \perp EF$ ，垂足为点 H ，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$ ，若 $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，则 AH 的长为（ ） .



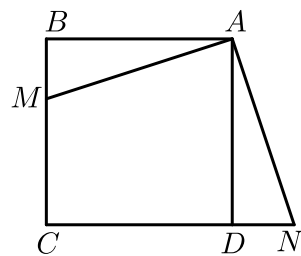
- A. 6 B. 7.2 C. 7 D. $6\sqrt{2}$

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1， $\angle EBF = 45^\circ$ ，过点 B 作 $BG \perp EF$ 于 G . 下列说法：①若 $AF = \frac{1}{3}$ ，则 $DG \parallel EB$ ；②若 E 为 CD 的中点，则 $\triangle GDE$ 的面积为 $\frac{1}{15}$ ；③若 $AF = CE$ ，则 $AF = \sqrt{2} - 1$ ；④ $AF \cdot CE + BG \cdot EF = 1$. 其中正确的是（ ） .



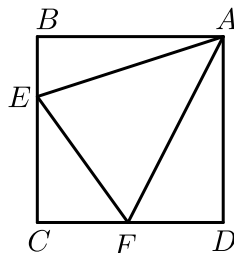
- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

18. 【感知】如图①，点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，点 N 是 CD 延长线上一点，且 $MA \perp AN$ ，易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADN$ ，进而证得 $\angle AMB = \angle AND$ 。



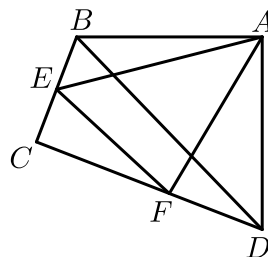
图①

- (1) 【应用】如图②，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ 。求证： $\angle BEA = \angle AEF$ 。



图②

- (2) 【拓展】如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ 。若 $\angle BEA = 50^\circ$ ，则 $\angle AFD$ 的大小为 _____ 度。



图③

 半角在倍角外

19. 已知：正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ，绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB 、 DC （或它们的延长线）于点 M 、 N 。

- (1) 如图1，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，有 $BM + DN = MN$ ，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时，如图2，请问图1中的结论是否成立？如果成立，请给予证明，如果不成立，请说明理由。

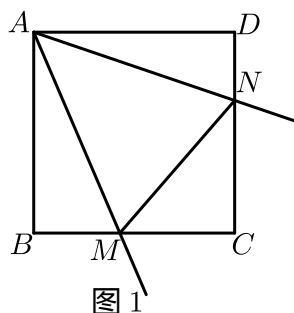


图 1

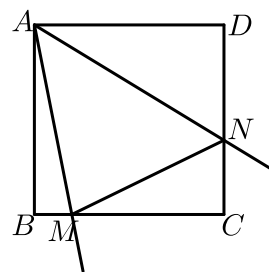


图 2

- (2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图3的位置时，线段 BM 、 DN 和 MN 之间有怎样的等式关系？请写出你的猜想，并证明。

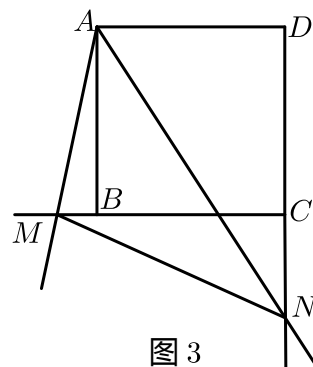


图 3

20. 已知：正方形 $ABCD$ 中（图1）， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N 。

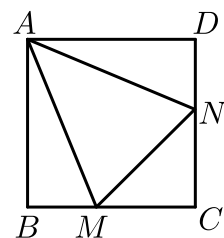


图1

- （1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时（图2），线段 BM ， DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明。

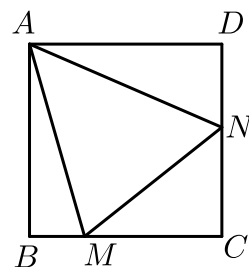


图2

- （2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到图3的位置时，线段 BM ， DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？证明你的猜想。

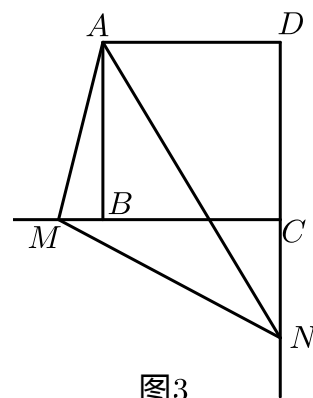
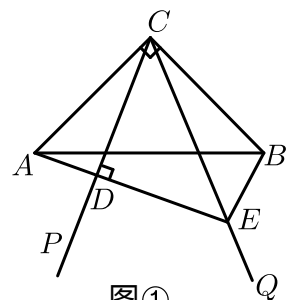


图3

- （3）若正方形的边长为4，当点 N 运动到 DC 边的中点处时，求 BM 的长。

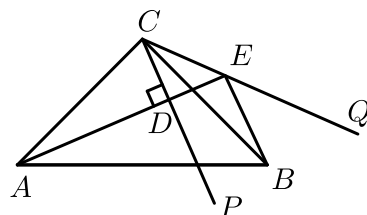
21. 如图：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E 。

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$ 。



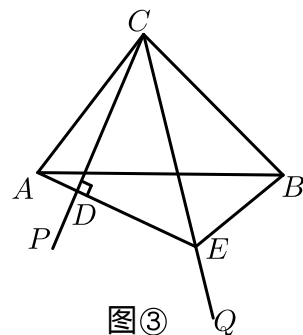
图①

(2) 如图②，当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时，则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为 _____。



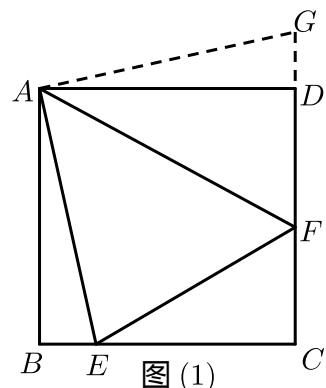
图②

(3) 在(1)的条件下，若 $CD = 12$ ， $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$ ，求 AE 的长。

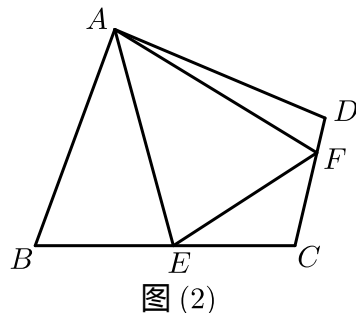


图③

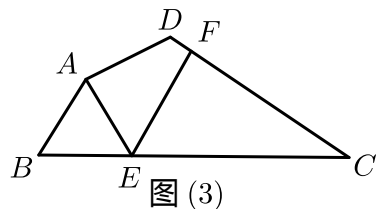
22. 问题：如图（1）点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，试判断 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系．



- （1）【探索发现】小明把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ，至 $\triangle ADG$ ，从而发现 BE 、 EF 、 FD 之间满足 _____ 的数量关系．
- （2）【类比引申】如图（2），四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF$ 与 $\angle BAD$ 满足 _____ 关系时， BE 、 EF 、 FD 之间仍满足以上的数量关系，并说明理由．

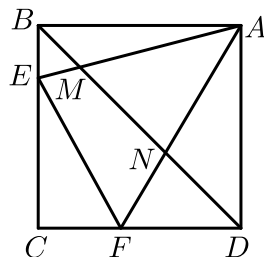


- （3）【探究应用】如图（3），在某公园的同一水平面上，四条通道围成四边形 $ABCD$ ．已知 $AB = AD = 100$ 米， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，道路 BC 、 CD 上分别有景点 E 、 F ，且 $AE \perp AD$ ， $DF = 50(\sqrt{3} - 1)$ 米，现要在 E 、 F 之间修一条笔直道路，求这条道路 EF 的长（结果保留根号）．

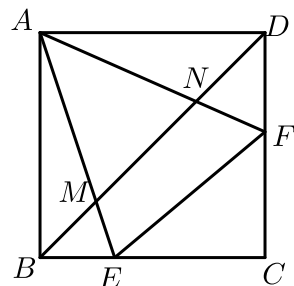


|| 角含半角的平方关系——半角在倍角内

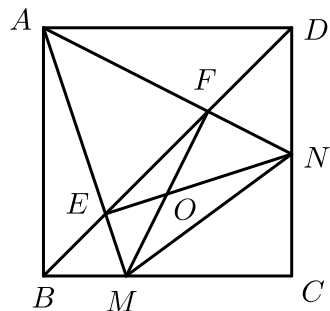
23. 如图，点 E 、 F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，则 EF 、 BE 、 FD 之间的数量关系是 _____ . 连结 BD ，交 AE 、 AF 于点 M 、 N ，则 MN 、 BM 、 DN 满足的数量关系是 _____ .



24. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ；若 $BE = 3$ ， $DF = 4$ ，则 $EF =$ _____，若 $BM = 2$ ， $DN = 3$ ，则 $MN =$ _____ .



25. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， M 、 N 分别是 BC 、 CD 上的点， $\angle MAN = 45^\circ$ ，连接 BD 分别交 AM 、 AN 于 E 、 F ，下面结论错误的是 _____ .



- ① $\triangle CMN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 的边长的两倍；
- ② 点 A 到 MN 的距离等于正方形 $ABCD$ 的边长；
- ③ $EF^2 = BE^2 + DF^2$ ；
- ④ $\triangle EMO$ 与 $\triangle FNO$ 均为等腰直角三角形；
- ⑤ $S_{\triangle AMN} = \sqrt{2}S_{\triangle AEF}$ ；
- ⑥ $S_{\text{正方形}ABCD} : S_{\triangle AMN} = 2AB : MN$.

26. 【发现证明】

如图1，点 E ， F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC ， CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，试判断 BE ， EF ， FD 之间的数量关系．

小聪把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，通过证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ；从而发现并证明了 $EF = BE + FD$ ．

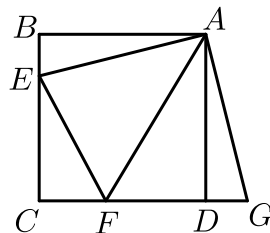


图1

(1) 【类比引申】

如图2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，请根据小聪的发现给你的启示写出 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系，并证明．

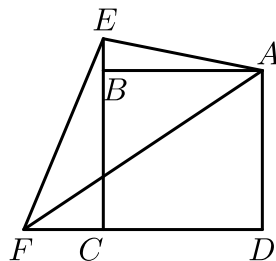


图2

(2) 【联想拓展】

如图3，如图， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 E 、 F 在边 BC 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，若 $BE = 3$ ， $EF = 5$ ，求 CF 的长．

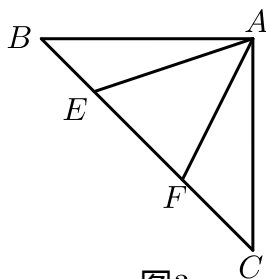


图3

27. 在学习了等腰三角形的知识后，数学兴趣小组的同学们又进一步对等腰直角三角形的一些特殊线段之间的关系进行了探究．

(1) 【尝试探究】

问题：如图 (1)，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = CB$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，试探究线段 AD 、 DE 、 EB 之间满足的等量关系．

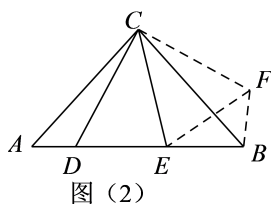
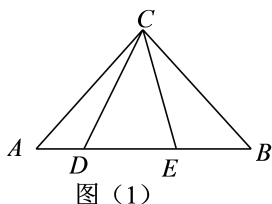
【探究发现】

如图 (2)，小聪同学作 $\triangle CBF \cong \triangle CAD$ ，连接 EF ，由已知条件易得 $\angle EBF =$ _____ 度， $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \angle ACD =$ _____ 度．

再根据“边角边”，可证 $\triangle CEF \cong$ _____，得到 $EF =$ _____．

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中，根据 _____ 定理，可得到 $BF^2 + BE^2 = EF^2$ ，

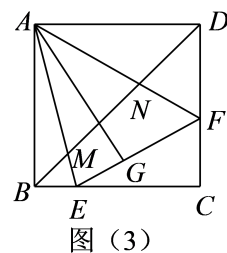
所以 AD 、 DE 、 EB 之间的等量关系是 _____．



(2) 【实践运用】

回答下列问题：

- ① 如图 (3)，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上，高 AG 与正方形的边长相等，求 $\angle EAF$ 的度数．



- ② 在①的条件下，连接 BD ，分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N ，若 $BE = 2$ ， $CF = 3$ ，则正方形的边长为 _____．
- ③ 在②的条件下， $BM = 2\sqrt{2}$ ，运用小聪同学探究的结论，直接写出 MN 的长为 _____．